

基于互信息的遥感图像区域配准并行算法的研究 与实现

周海芳 杜云飞 杨学军 李思昆

(国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073)

摘要 图像配准是图像融合、变化检测、目标识别等遥感应用中的重要步骤。互信息由于具有无需预处理、自动化程度高以及鲁棒性强等特点, 将其作为一种相似性测度进行图像配准成为近几年图像处理领域的研究热点。随着遥感图像数据量的不断加大, 传统的单机处理模式已经无法满足一些应用的时效性要求。基于对串行算法计算瓶颈的实验分析, 研究并提出了一种基于互信息的遥感图像区域配准并行算法, 分别给出了数据划分策略和互信息计算并行处理方案, 采用边界冗余划分和二叉树归约方法减少数据通信, 并对算法进行了定量的复杂度分析。实验结果表明该算法可扩展性好, 通用性强。

关键词 互信息 遥感图像处理 区域配准 并行算法

中图分类号: TP301.6 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)01-0174-07

Study and Implementation of Parallel Region-based Registration Algorithm Based on Mutual Information for Remote-sensing Images

ZHOU Hai-fang DU Yun-fei YANG Xue-yun LISi-kun

(School of Computer Science and Technology, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract Image registration is an important step of image fusion, change detection and target recognition in remote-sensing applications. As a similarity measure, mutual information has become a hot topic in image processing for its advantages of no pre-processing, robustness and a high degree of automation. But with the increasing of image size in remote-sensing, high computing complexity of image registration algorithm makes that traditional single-processor computing mode could not meet the requirement of real-time processing in some applications. Based on the experimental analysis of corresponding serial algorithm, a parallel region-based registration algorithm based on mutual information for remote-sensing images is proposed. Strategy of data partition and parallel computing method of mutual information are given. To avoid data communication, some techniques like redundant data partition on boundary and reducing on binary-tree are used. Then, a quantitative analysis of computing difficulty is given. The experimental results show that the proposed parallel algorithm has good scalability and applicability.

Keywords mutual information, remote-sensing image processing, region-based registration, parallel algorithm

0 引言

在遥感领域, 图像配准是异源数据融合、异质图

像分析、目标变化检测与识别、图像镶嵌等图像处理应用中的关键步骤。互信息来源于信息论, 于 20 世纪 90 年代作为一种相似性测度被引入图像处理领域^[1]。由于以互信息作为目标函数的配准算法, 对

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863)项目(2007AA12Z147); 国家自然科学基金项目(60603081)

收稿日期: 2009-02-25 改回日期: 2009-05-27

第一作者简介: 周海芳(1975—), 女, 副研究员, 2003 年获国防科技大学计算机软件专业博士学位。研究方向为图形图像处理及其并行计算方法。E-mail: haifang_zhou@163.com

配准的两幅图像灰度之间关系的本质不需要做任何假设, 在大多数应用场合不需要图像的预分割, 能够全自动实现, 鲁棒性强、精度最高, 因此在图像配准方法中得到了广泛应用^[2]。但是, 配准的计算量很大, 是一个典型的计算密集型过程。并行计算是提高处理速度的最有效途径之一, 不但可以使配准算法在不降低精度的同时达到实时性的要求, 而且能够提高算法的自动化程度、扩大业务规模^[3]。

本文即针对基于互信息的遥感图像区域配准算法进行研究, 首先分析描述了串行算法的变换模型、相似性测度及优化方法等关键算法要素; 并基于算法瓶颈的分析, 提出一种可扩展性好、通用性强的区域配准并行算法; 最后在机群系统上实现和测试了串并行算法, 并给出了算法的性能分析。

1 相关工作

针对图像配准过程计算密集的特点, 国内外自 20 世纪 90 年代初期就开始了图像配准快速或并行实现方法的研究, 但随着计算机体系结构和配准方法的不断革新, 图像配准并行算法的研究也面临着新的挑战。Christensen 分别在 MMD (SG I Challenge) 和 SMD (MarsPar) 机器上实现了 3D 图像配准的并行算法, 采用距离测度作为相似性测度, 并证明了 MMD 上的算法比 SMD 的算法性能最少快 4 倍^[4]。Warfield 研究了脑部变形图像的配准算法的并行算法, 但是算法的负载均衡性有待提高^[5]。Fumihiko 对一种 3D 图像的配准算法进行了并行化的研究, 重点研究了数据划分方式^[3]。Wachowiak 对配准中优化算法的并行化做了一定的探索^[6]。

而国内外目前针对提高基于互信息的图像配准计算性能的研究多集中在串行的快速算法上, 并行算法的研究比较滞后。文献 [2 7-9] 中对互信息计算及优化等环节的性能因素的分析可以为并行算法设计提供理论依据。Rohlfing 在基于共享存储的多处理器环境下实现了并行的基于互信息的多模图像配准算法^[10]。Stefanescu 研究了对变换模型具有先验知识的基于互信息的配准的并行算法, 重点研究了数据划分方式对通信的影响^[11]。因此, 面向遥感应用, 针对基于互信息的图像区域配准并行算法的研究, 尚没有提出系统性的理论方法和较成熟的解决方案。

2 基于互信息区域配准串行算法描述

2.1 变换模型

图像的配准变换方法按照图像变换的模型又可分为刚性配准和非刚性配准两大类。刚性配准是寻找一个六自由度的变换, 使得源图像中的点映射到目标图像中的对应点, 它适用于不存在形变或刚性体的配准, 在变换中任意两点之间的距离保持不变。除了刚性变换以外, 其他的变换都是非刚性变换。非刚性变换有应用物理模型拟合和采用空间变换的方法。变换模型不同会造成计算复杂度的差异, 但并不影响数据并行算法的设计策略。不失一般性, 下面均以刚性变换为基础进行算法描述和实验验证。

设参考图像为 $R = F_R(x, y)$, 待配准图像为 $T = F_T(x, y)$, 配准 R 和 T 就是确定两幅图像间的几何变换 $G_r = T_r(x, y)$ 。这里采用 2D 刚性变换模型, 即 $V = (t_x, t_y, \theta)$, 表示两幅图像刚性变换参数的三元组, 其中 $[t_x, t_y]$ 是在 x 和 y 方向上的位移, θ 是旋转角度, T_V 是变换矩阵。

2.2 互信息相似性测度

设描述参考图像和待配准图像相似性的互信息测度为 I 。如果图像 R 和 T 是两个随机变量, 边缘概率分布分别是 $p_R(r)$ 和 $p_T(t)$, 联合概率分布 $p_{RT}(r, t)$, $H(R)$ 和 $H(T)$ 分别是 R 和 T 的熵, $H(R, T)$ 是 R 和 T 的联合熵, $H(R|T)$ 和 $H(T|R)$ 分别是给定 T 的 R 的条件熵和给定 R 的 T 的条件熵。如果边缘概率分布和联合概率分布满足 $p_{RT}(r, t) = p_R(r) \cdot p_T(t)$, R 和 T 是统计独立的, 则互信息的定义如下:

$$I(R, T) = H(R) + H(T) - H(R, T) \quad (1)$$

$$I(R, T) = \sum_{r,t} p(r, t) \log \frac{p(r, t)}{p(r)p(t)} \quad (2)$$

2.3 优化策略

基于互信息的配准方法是寻找两幅图像之间的互信息达到最大时, 它们之间的最佳变化参数。寻找最大化互信息的优化算法有两种策略: 解析法和直接法。解析法需要计算目标函数的梯度, 沿着梯度的方向进行搜索。直接法对函数参数进行直接优化, 不需要计算梯度, 通过比较目标函数的大小来移动迭代点。当目标函数不可微, 甚至目标函数是分段表示的时候, 计算梯度就比较困难, 直接法就特别有用。直接法通常由两个动作构成, 探测移动和模

式搜索。在直接法中,最著名的一种方法是 Powell 方法^[12]。该算法轮流对变换参数进行优化,由于无需计算梯度,因而可以加快搜索最大互信息的速度,在每一维内使用 Brent 算法迭代搜索和估计配准参数。Powell 算法有严密的理论体系,在通常情况下,它的计算效率要高于其他的直接法。本文即采用 Powell 方法优化变换参数。

2.4 算法流程

确定了上述 3 个算法要素之后,基于互信息的区域配准算法的逻辑流程如下:

- 1) 根据初始化或更新的变换参数变换图像,按照式(2)计算互信息;
- 2) 应用 Powell 方法,优化互信息的值;
- 3) 更新变换参数和搜索方向;
- 4) 重复 1)直到互信息达到最大。

图像经过几何变换后,像素的坐标不会和原来的采样网格完全重合,像素的灰度值也需要重新计算,这就需要对变换后的图像进行重采样和插值处理。采用三线性部分体积分布 (trilinear partial volume distribution) 插值算法,简称 PV 插值方法^[13]。如图 1 所示, u, v 是点 n_4 到点 $G_r(s)$ 的距离。 w_1, w_2, w_3, w_4 分别为 n_1, n_2, n_3, n_4 的权值。点 $G_r(s)$ 的灰度值 $t(s)$ 是 4 个顶点灰度值的加权平均。PV 法实质是三线性插值法^[13]的改进,与由参考图像插值生成新图像灰度值后仅组成一个像素对不同, PV 法将待配准图像的格点与栅格的 4 个顶点的图像灰度值组成 4 个像素对,但每个像素对对联合直方图的贡献不是 1,而是权值 w_i 。这样联合直方图 h 中的某些坐标点处的相应灰度像素对的个数不是整数,当线性变换微弱变化时参考图像的边缘概率密度可以平稳、缓慢地变化,从而使互信息的计算避免了一次插值运算且更为精确,同时优化过程中的局部极值问题也会有所缓解。

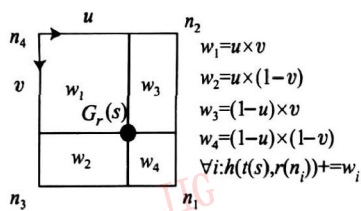


图 1 PV 插值法示意图

Fig 1 PV Interpolation

在单机环境下实现了上述配准算法,表 1 给出了对不同规模的模拟测试数据进行处理时算法执行

的墙钟时间及互信息的计算占整个时间的比例。显然,互信息的计算是该配准算法的瓶颈,是并行算法设计的关键步骤。

表 1 互信息的计算与优化在整个计算过程中所占百分比

Tab 1 Percentages of mutual information computation and optimization

墙钟时间 /s	数据 1	数据 2	数据 3	数据 4
运行总时间	23 91	88 05	378 99	1 498 66
互信息计算时间	23 51	86 57	372 54	1 472 59
所占比例	98 33%	98 32%	98 3%	98 28%

3 并行算法设计与描述

并行算法的实现模式大致有 3 种:流水线并行、功能并行和数据并行^[14]。由于图像数据具有一致性和邻域性的特点,因此更适合于采用数据并行模式。

3.1 数据划分

在数据并行模式下,为了提高并行效率,各处理机的执行时间应该尽可能相同,这就要求分配给各处理机的负载应该尽可能一致。对于 2 维图像数据,常见的划分方法有垂直划分、水平划分和交叉划分 3 种。根据式(2),互信息的计算只与图像数据的尺寸有关,与数据划分方式无关,并且计算每一个子块所需的操作次数也只与子块长度有关,与数据划分方式无关。从通信效率看,由于将数据分块后,计算全局的互信息要进行数据通信。通信传递的数据量与区域的大小成正比。在这 3 种划分中,区域的大小都是对等的,所以 3 种划分方式的通信量相当。

基于上述分析,本文的并行算法采用垂直划分方式进行计算。具体来讲,是每个结点负责处理待配准图像中的一部分像素点。待配准图像的变换是一个局部的操作,每个块的操作独立于其他块,因此这些块的操作可以并行进行。假设有 N 个处理器节点,图像宽度为 M , W_i 为每个处理机处理的图像块数。当图像的宽度恰好能被处理机的数目整除时,每个节点处理的块数 W_i 是同样多的。当不能整除时, M 整除 N 后的整数部分为 n , 余数为 m (显然此处 $M \hat{=} m$), 则给前 m 个节点分配 $n+1$ 个块,而后 $N-m$ 个节点处理的块数是 n 。这样能达到较好的负载平衡,如图 2 所示。

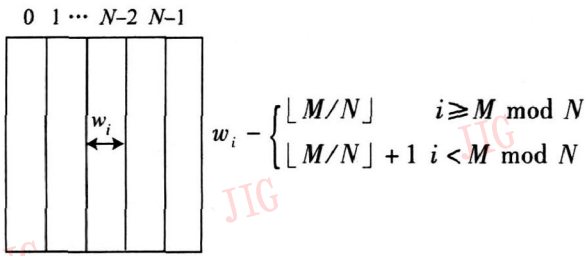


图 2 负载均衡的数据分布图

Fig 2 Load-balanced data distribution

3 2 互信息的并行计算

基于互信息的配准方法是一种对图像进行全局计算的方法。两幅图像对应的点对信息存储在一个 2 维矩阵里。为了加快互信息的计算, 并行计算分块互信息, 得到每子块的互信息的值。然后采用二叉树归约的方法把子块互信息的值加起来得到全局互信息, 再采用 one-to-all 的广播通信方式, 使每个计算结点得到全局的互信息。具体的计算过程如下:

1) 用直方图方法计算局部互信息。

设模板图像 R 在位置 S 的灰度为 $r(s)$, 待配准图像 T 在相对应的变换位置的灰度为 $t(g_v, s)$, g_v 是由参数 γ 确定的应用到图像 T 的变换模型。联合灰度直方图可以通过 2D 矩阵来表达, 如式 3。

$$h = \begin{bmatrix} h(0\ 0) & h(0\ 1) & \dots & h(0\ N-1) \\ h(1\ 0) & h(1\ 1) & \dots & h(1\ N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h(M-1\ 0) & h(M-1\ 1) & \dots & h(M-1\ N-1) \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中, M, N 分别为待配准图像和模板图像的最大灰度值, $h(x, y)$ 是待配准图像中灰度值为 x , 模板图像中对应点灰度值为 y 的像素对的总个数。基于联合直方图并根据式 (1) 直接计算分块图像的局部互信息。

2) 二叉树归约计算全局互信息

采用递归的二叉树归约算法来计算全局互信息。首先, 每个奇数点将其互信息的内容发送到其前一个的偶数点上, 这样每相邻两个结点的互信息内容即归约到一个结点上; 再按照相同的规则将归约点的结果两两合并, 不断重复这个递归的过程直到根结点。

3 3 并行算法实现

将待配准图像分块并设置初始变换参数, 然后对分块的待配准图像进行变换, 得到一个变换后的

图像。并行计算变换后的图像跟原图像之间的互信息。根据互信息的大小改变变换参数, 如果是最大, 停止计算, 如果不是最大, 改变变换参数, 重复上述过程。图 3 是应用了数据分块跟互信息并行计算之后的并行算法流程图 (图中给出了结点 0 和结点 n 的计算流程)。

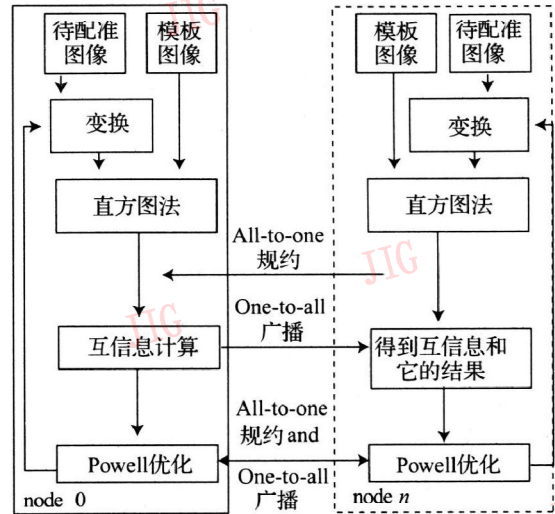


图 3 并行配准算法流程图

Fig 3 Flow chart of parallel registration algorithm

4 复杂度分析

首先分析串行算法的时间复杂度。对于 $M \times M$ 大小的图像, 设联合直方图点的数量大小为 K , 假设对一个像素点进行的操作为单位时间, 在这里对像素点的操作要多个算术运算, 在数量级上跟消息的启动和数据的传送时间相当。优化时间所占比例较少, 相对于图像变换和互信息计算来说可以忽略。因此基于互信息的区域刚性配准串行算法的总耗时为

$$T_s = O(M^2 + K^2) \quad (4)$$

下面分析并行算法运算时间。并行算法的计算开销包括两部分: 计算时间 T_{comp} 和通讯时间 T_{comm} 。对通讯时间来讲, 基于 $\text{Log}P$ 模型分析^[14], 设 t_a 是消息的启动时间, t_b 是数据的传送时间, 并行系统有 N 个处理器。在 Powell 方法的每个线性最小优化里面有 L 个解。

根据上述并行算法的描述, 计算时间约为

$$T_{comp} = O\left(\frac{M^2 + K^2}{N}\right) \quad (5)$$

当计算互信息时, 有两个通讯步骤, 一个是归

约,还有一个是广播。在归约操作的数据变换中包含一个直方图的 K^2 个数据,因此通讯开销时间为

$$T_{comm1} = O \left(t_a + t_b \cdot K^2 \lceil \log N \rceil \right) \quad (6)$$

在广播过程中通讯开销时间为

$$T_{comm2} = \lceil t_a + t_b \cdot \lceil \log N \rceil \rceil \quad (7)$$

当应用 Powell 方法进行优化时,也有归约和广播两个通讯步骤。在归约操作中的变换数据包括直方图,有 K^2 个数据,因此通讯时间为

$$T_{comm3} = O \left(\lceil t_a + t_b \cdot K^2 \lceil \log N \rceil \rceil \cdot L \right) \quad (8)$$

广播操作的变换数据就是互信息。因此广播时间为

$$T_{comm4} = O \left(\lceil t_a + t_b \cdot \lceil \log N \rceil \rceil \cdot L \right) \quad (9)$$

所以在并行算法中所用的通讯总耗时为

$$T_{comm} = T_{comm1} + T_{comm2} + T_{comm3} + T_{comm4} = O \left(t \cdot L + t_b \cdot \lceil L + \lceil K^2 \lceil \log N \rceil \rceil \right) \quad (10)$$

所用的总开销为

$$T_N = T_{comp} + T_{comm} = O \left(\left\lfloor \frac{M^2 + K^2}{N} \right\rfloor + t_a \cdot L + t_b \cdot (L + 1) K^2 \lceil \log N \rceil \right) \quad (11)$$

因此算法的加速比和并行效率分别为

$$S_N = \frac{T_s}{T_N} = \frac{O(M^2 + K^2)}{O \left(\left\lfloor \frac{M^2 + K^2}{N} \right\rfloor + t_a \cdot L + t_b \cdot (L + 1) K^2 \lceil \log N \rceil \right)} \approx O \left(\frac{N}{1} \right) = O(N) \quad M \rightarrow \infty \quad (12)$$

$$E_N = \frac{S_N}{N} = \frac{T_s}{T_N \times N} = \frac{1}{N} \times \frac{O(M^2 + K^2)}{O \left(\left\lfloor \frac{M^2 + K^2}{N} \right\rfloor + t_a \cdot L + t_b \cdot (L + 1) K^2 \lceil \log N \rceil \right)} \approx O \left(\frac{(1 + K^2 M^2)}{1 + \frac{K^2}{M^2} + N \frac{t_a \cdot L + t_b \cdot (L + 1) K^2 \lceil \log N \rceil}{M^2}} \right) \approx O(1) \quad M \rightarrow \infty \quad (13)$$

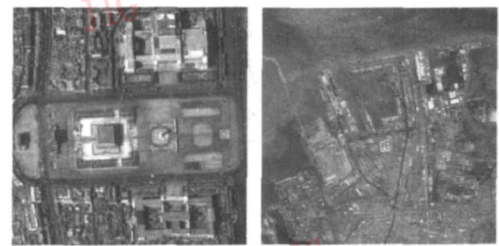
可见随着图像规模的增大,在理论上算法的加速比趋近于 N ,效率趋近于 1,说明算法具有较好的可扩展性。

5 实验结果

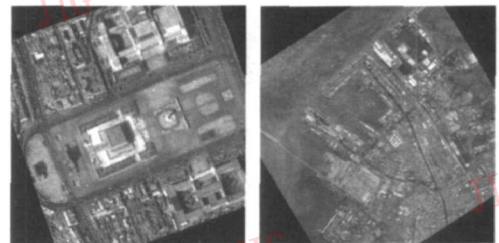
在上述算法分析和设计的基础上,在机群系统

上实现了基于互信息的区域刚性配准串、并行算法,并对不同规模的实验图像进行了测试与性能分析。机群系统主要配置为 16 个同构的处理结点,每个结点的配置为 Intel Xeon 3 2 GHz CPU, 4 G 内存, 60 GB 硬盘,软件环境为 Redhat 9 0(内核为 Linux 2 4 20);所有节点通过 1Gbps 的以太网连接;并行算法基于 MPICH 1 2 7 的消息传递并行库。实验数据包括规模为 256×256 512×512 $1\ 024 \times 1\ 024$ $2\ 048 \times 2\ 048$ 的图像对。

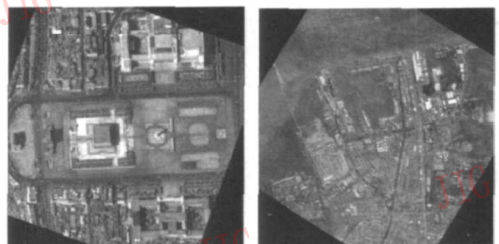
图 4 给出了两组待测图像的配准结果。图 4(a) 是参考图像,图 4(b) 是待配准图像,图 4(c) 是配准后的输出图像。串并行算法的执行时间如表 2 所示。



(a) 模板图像



(b) 待配准图像



(c) 配准后的输出图像

图 4 基于互信息的区域配准算法测试效果

Fig 4 Results of region-based registration using mutual information as similarity measure

由表 2 可见,设计的并行算法较串行算法,在性能上有明显的提高,执行时间减少的幅度随着数据规模的扩大而增大。图 5 给出了针对不同规模的测试数据,算法的加速比曲线。图 6 是相应的并行效率曲线。

表 2 四种图像规模的配准时间

Tab 2 Registration time of 4 images with different scales /s

进程数	256 × 256	512 × 512	1 024 × 1 024	2 048 × 2 048
1	23.91	88.05	378.99	1 498.66
2	13.67	49.46	203.76	792.94
4	11.23	27.34	111.47	415.14
8	11.49	17.10	57.16	226.57
16	11.44	11.89	38.59	128.20

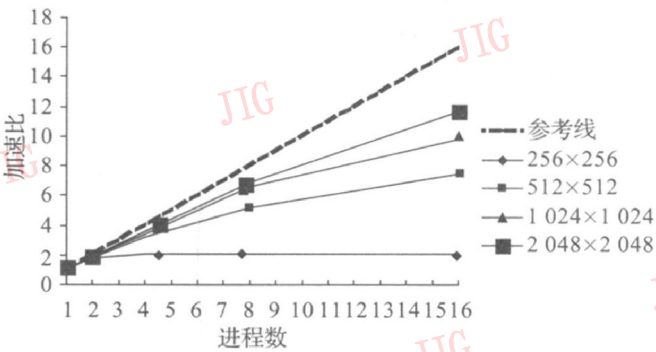


图 5 并行算法加速比

Fig. 5 Speedup of parallel algorithm

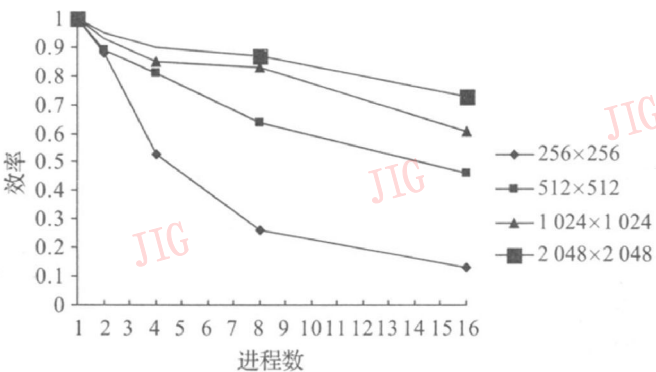


图 6 并行算法效率

Fig. 6 Efficiency of parallel algorithm

从图 5 和图 6 可以看出, 随着系统规模的增大, 加速比增大; 而随着数据规模的扩大, 加速比和效率都随之增大, 符合第 4 节理论分析的结果。同时, 当处理机数目达到一定的程度, 对于给定的一定规模图像, 算法的加速比增长减缓, 有的甚至没什么增加, 这是因为随着处理机规模的增大, 分摊到每个处理机上的有效计算量减小, 而通信耗时却没有减少, 甚至还会有所增加, 因此, 算通比的降低是导致并行效率降低的主要原因。但是, 当处理机数目一定时, 并行效率随着数据量的增加而提高, 这说明当系统规模扩大时, 适当增大图像规模, 可以保持算法的效率不变, 这也充分体现了算法的可扩展性。将本实

验的结果与文献 [10]、[11] 的算法进行了定性的比较: 文献 [10] 的算法仅适合于共享存储结构的并行系统, 可扩展性十分有限, 不适合更为通用的分布存储的大规模并行系统; 文献 [11] 重点研究了数据划分方式对通信的影响, 未给出系统的解决方案。因此, 本文面向遥感领域, 针对主流的分布存储并行系统提出并实现的互信息区域配准算法对实际应用更具有指导意义。

6 结 论

在抽取基于互信息的图像区域配准串行算法基本要素的基础上, 设计并实现了一种基于互信息的区域配准并行算法。从实现快速配准的目的出发, 在数据划分时, 采用垂直划分, 并行读入数据并兼顾负载均衡; 在互信息方面, 采用二叉树规约并行计算, 进一步加快执行效率。下一步的工作将进一步考虑非刚性模型引入的计算复杂度、更精确的基于 Parzen 窗的互信息计算方法以及现有并行算法的通信优化。

参考文献 (References)

- [1] Viola P A. A alignment by Maximization of Mutual Information [D]. Boston, MA, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1995.
- [2] Thevenaz P, Unser M. Optimization of mutual information for multiresolution image registration [J]. IEEE Transactions on Image Processing 2000, 9(12): 2083-2099.
- [3] Funahiko I, Kanrou O, Osaka H. A data distributed parallel algorithm for nonrigid image registration [J]. Parallel Computing 2005, 31(1): 19-43.
- [4] Christensen Gary E. MMD vs SMD parallel processing: A case study in 3D medical image registration [J]. Parallel Computing 1998, 24(9-10): 1369-1383.
- [5] Warfield S K, Ferrant M, Gallez X, et al. Realtime biomechanical simulation of volumetric brain deformation for image guided neurosurgery [C] // Proceedings of the High Performance Networking and Computer Conference, Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2000, 23Q: 1-16.
- [6] Wachowiak M P, Peters T M. High performance medical image registration using new optimization techniques [J]. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine 2006, 10(2): 344-353.
- [7] Kybic J, Unser M. Fast parametric elastic image registration [J]. IEEE Transactions on Image Processing 2003, 12(11): 1427-1442.
- [8] Helmman S, Mahnke O, Potts D, et al. Fast computation of

- Mutual Information in a variational image registration approach [C] // Tokdorff T, et al. Bildverarbeitung für die Medizin 2004. Berlin: Springer, 2004. 116-118, 448-452.
- [9] Rueckert D, Clarkson M, Hill D L G, et al. Non-rigid registration using higher-order mutual information [J]. Proceeding of SPIE, 2000, 3979(2): 438-447.
- [10] Rohlfing T, Maurer C R. Nonrigid image registration in shared-memory multiprocessor environments with application to brains, breasts, and bees [J]. IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine, 2003, 7(1): 16-25.
- [11] Stefanescu R. Parallel Nonlinear Registration of Medical Images with a Priori Information on Anatomy and Pathology [D]. Sophia Antipolis University de Nice, 2005.
- [12] Su Ta-shan. Optimized Computing Principle and Algorithm Program Designing [M]. Changsha: Press of National University of Defense Technology, 2000. 55-80. [粟塔山. 最优化计算原理与算法程序设计 [M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000. 55-80.]
- [13] Cao Jie, Dai Jun-feng. Medical image registration based on mutual information and improved PV interpolation [J]. Journal of Scientific Technology and Engineering, 2007, 7(23): 6066-6069. [曹洁, 戴峻峰. 基于互信息和改进 PV 插值算法的医学图像配准 [J]. 科学技术与工程, 2007, 7(23): 6066-6069.]
- [14] Chen Guo-liang. Designing and Analysis of Parallel Algorithm [M]. Beijing: Press of Advanced Education, 1994. 22-98. [陈国良. 并行算法的设计与分析 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1994. 22-98.]